Il decalogo di Matematica

della Prof.ssa Agueli Maria Assunta

SOMMARIO

della Prof.ssa Agueli Maria Assunta

Data una funzione $y = f(x)$ Determinare:

1. L'INSIEME DI DEFINIZIONE C.E. (CAMPO DI ESISTENZA/DOMINIO)

⇨ Dicesi C.E. l'insieme dei valori attribuibili ad x affinché la y assuma valori reali (R) e finiti.

Ricerca dell'insieme di definizione:

$$\text{C.E.}\begin{cases} \frac{f(\ )}{g(x)} \rightarrow g(x) \neq 0) \\ \sqrt[2n]{f(x)} \rightarrow f(x) \geq 0) \\ \log[f(x)] \rightarrow f(x) > 0) \end{cases}$$

se la x compare al DENOMINATORE, si pone $\boxed{g(x) \neq 0}$

se la x sta sotto RADICE di INDICE PARI, si pone il $\boxed{f(x) \geq 0}$

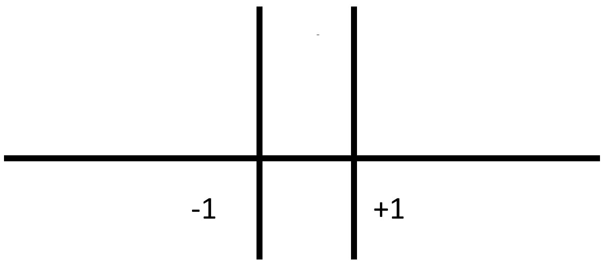
se la x è argomento di LOGARITMO , si pone $\boxed{f(x) > 0}$

ANALITICAMENTE GRAFICAMENTE

Esempi:

1) $= \frac{2x^2 - 3x^3}{x^2 - 1} =$ → C.E. : $x^2 - 1 \neq 0$ → $x \neq \pm 1$ ➔ **C.E. :** $\forall\ \mathbf{x} \in \boldsymbol{R}\ /\ \boldsymbol{x} \neq \pm\mathbf{1}$

Grafico



Simbologia : $\forall$ *(qualunque,ogni)*

$/$*(tale che)* **C.E.** (campo d'esistenza o **D** dominio)

2) $y = \sqrt{x^2 - 4}$ → C.E. : $x^2 - 4 \geq 0$

➔ C.E. : $\forall\ \mathbf{x} \in \boldsymbol{R}\ /\ x \leq -\mathbf{2};\ x \geq \mathbf{2}$

3) $y = \frac{x+3}{\sqrt{x^2 - 5x+6}}$ → C.E. $\begin{cases} x^2 - 5x + 6 \geq 0 \\ x^2 - 5x + 6 \neq 0 \end{cases}$ ossia $x^2 - 5x +> 0$ da cui ne segue ➔ C.E. : $\forall\ \mathbf{x} \in \boldsymbol{R}\ /\ x < \mathbf{2};\ x > 3$

4) $y = \frac{4x+1}{x^2 + 3}$ → C.E. : $\forall\ \mathbf{x} \in \boldsymbol{R}$ (perché $x^2 + 3 \neq 0\ sempre$)

5) $y = \mathbf{ln}(\boldsymbol{x}+\mathbf{1})$ → C.E. : $x+1 > 0$ ossia $x > -1$ $da\ cui\ ne\ segue$ ➔
C.E. : ∀ $\mathbf{x} \in \boldsymbol{R}$ / $x > -1$

Simbologia→ **ln** è il logaritmo naturale (di base *e*,→ *Numero di Keplero)*

6) $y = \frac{\sqrt[3]{x-4}}{x+10}$ →C.E. : x + 10 ≠ 0 ossia x ≠ -10 (la radice cubica esiste sempre per cui non si deve esaminarne la condizione di esistenza)

Determina il dominio della seguente funzione

7) $y = \frac{\sqrt{3+1}}{x^2-1}$ →

della Prof.ssa Agueli Maria Assunta

Premesso che il concetto di LIMITE serve a descrivere l'andamento di una funzione all'avvicinarsi del suo argomento (x) a un dato valore, i limiti si utilizzano soprattutto per definire la continuità, gli asintoti, la derivabilità di una funzione.

NB → TRA I VALORI CHE ANNULLANO IL DENOMINATORE SONO DA RICERCARE GLI <u>ASINTOTI VERTICALI</u> (RETTE DEL TIPO $x = e$ tale che $\lim_{x \to e} f(x) = \infty$

→ **I <u>PUNI DI DISCONTINUITÀ</u> SONO I VALORI PER CUI O IL LIMITE NON ESISTE, OPPURE IL LIMITE È** ∞

e

Data una funzione $y = f(x)$ Determinare:

Data una funzione $y = f(x)$ Determinare:

2. IL VALORE DEL LIMITE AGLI ESTREMI DI DEFINIZIONE

Esempio:

$$\boldsymbol{y = \frac{x+1}{\sqrt{x^2-9}}}$$

→ CE : ∀ **x** ∈ $\boldsymbol{R}$ $x < -3;\ x > 3$

→ $x \in (-\infty;\ -3) \cup (3; \infty)$

I Limiti da calcolare sono:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = l_1 \quad ; \qquad \lim_{x \to -3^-} f(x) = l_2$$

$$\lim_{x \to 3^+} f(x) = l_3 \quad ; \qquad \lim_{x \to \infty} f(x) = l_4$$

Per il $\boldsymbol{\lim_{x \to \pm\infty}}$ $\boldsymbol{f(x)}$ vale la seguente regola [della **mongolfiera**]

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} \begin{cases} \infty & \text{se il grado di } f(x) \text{ è maggiore } \boxed{>} \\ 0 & \text{se il grado di } f(x) \text{ è minore } \boxed{<} \\ \frac{a}{b} & \text{se i gradi sono uguali } \boxed{=} \end{cases}$$

*[**a** è il coefficiente della x di grado max di $\boldsymbol{f(x)}$ e*
***b** è il coefficiente della x di grado max di $\boldsymbol{g(x)}$]*

- Il $\boldsymbol{\lim_{x \to 3^+}}$ $\boldsymbol{f(x)}$ è detto **LIMITE DESTRO di 3,** ossia la x tende a 3 da ds per eccesso
- Il $\boldsymbol{\lim_{x \to 3^-}}$ $\boldsymbol{f(x)}$ è detto **LIMITE SINISTRO di 3,** ossia la x tende a 3 da sx per difetto

Esempio:

$$\boldsymbol{y = \frac{3x+1}{x-2}}$$

→ CE : ∀ **x** ∈ $\boldsymbol{R}$ **/** $x \neq \boldsymbol{2}$ **oppure**

→ $x \in (-\infty;\ 2) \cup (2; \infty)$

della Prof.ssa Agueli Maria Assunta

$$\lim_{x\to 2^-}\frac{3x+1}{x-2}=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{3(2-\varepsilon)+1}{2-\varepsilon-2}=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{7-3\varepsilon}{-\varepsilon}=\lim_{\varepsilon\to 0}-\frac{7-3\varepsilon}{\varepsilon}=\frac{7}{0}=-\infty$$

$$\lim_{x\to 2^+}\frac{3x+1}{x-2}=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{3(2+\varepsilon)+1}{2+\varepsilon-2}=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{7-3\varepsilon}{\varepsilon}=\frac{7}{0}=+\infty$$

Il $\lim_{x\to 2^-} f(x)=-\infty$ ci assicura che la retta $x-2$ è effettivamente un **AV** per la funzione (come pure) $\lim_{x\to 2^+} f(x)=+\infty$

Esempio:

$$\lim_{x\to 2^-}\frac{x^2-4x+3}{x^2-9}=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{(3-\varepsilon)^2-4(3-\varepsilon)+3}{(3-\varepsilon)^2-9}$$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\cancel{9}+3\varepsilon+\varepsilon^2\cancel{-12}+4\varepsilon\cancel{+3}}{\cancel{9}-6\varepsilon+\varepsilon^2-\cancel{9}}=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\varepsilon(\varepsilon-2)}{\varepsilon(\varepsilon-6)}=\frac{1}{3}$$

Questo sta a signi3ficare che la retta $x=3$ **non è un AV per la curva**, infatti

$y=\frac{x^2-4x+3}{x^2-9}=\frac{\cancel{(x-3)}(x-1)}{\cancel{(x-3)}(x+3)}$ **trasformandosi in** $y=\frac{(x-1)}{(x+3)}$

che ha per AV la retta $\boxed{x=-3}$

NB = → se $\boxed{x=c}$ è un AV per la $f(x)$

Allora

$$\lim_{x\to c^+} f(x)=\pm\infty \qquad e/o \qquad \lim_{x\to c^-} f(x)=\pm\infty$$

3. GLI ASINTOTI

⇨ ASINTOTO : Retta tangente alla curva all'infinito

NB = →Ci possono essere tanti asintoti verticali, ma max 1 tra orizzontale oppure obliquo
→ non bisogna cercare asintoti orizz o obliqui <u>se CE è un intervallo limitato.</u>
→ se la funzione è razionale intera non ci sono asintoti di NESSUN tipo.

A) VERTICALI

della Prof.ssa Agueli Maria Assunta

Condizione : una retta del tipo $x = a$ è Asintoto Verticale [AV]

Se $\lim_{x \to a} f(x) = \pm\infty$ → AV : $x = a$

Gli asintoti verticali sono da ricercarsi tra i valori della x che annullano:

1. Il denominatore
2. L'argomento del logaritmo.

Esempi AV:

1b. $\boldsymbol{y = \frac{x+3}{x^2-25}}$ $\boldsymbol{x^2 - 25 = 0} \to$ $\lim_{x \to \pm 5} f(x) = \pm\infty$ → $\boldsymbol{x = \pm 5}$ AV

2b. $\boldsymbol{y = \frac{x}{x^2+9}}$ $\boldsymbol{x^2 + 9 = 0}$ MAI → $\nexists$ AV

3b. $\boldsymbol{y = \frac{x^2-9}{x^2-5x+6}}$ $\boldsymbol{x^2 - 5x + 6 = 0}$ $\begin{cases} \boldsymbol{x = 3} & \boldsymbol{\lim_{x \to 3} f(x) = 6 \quad 0 \to \frac{0}{0}\ indet} \\ \boldsymbol{x = 2} & \boldsymbol{\lim_{x \to 2} f(x) = \infty \quad AV} \end{cases}$

Ne segue : → $x = 2$ **AV** mentre $x = 3$ non è **AV** ma punto di **discontinuità.**

B) ORIZZONTALI

Se $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = l$ → AO : $y = l$

Se $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \infty$ → AO : $\nexists$ *[però ci può essere l'obliquo]*

Esempi AO:

1a. $\boldsymbol{y = \frac{2x^2-1}{3x^2-9}}$; $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \frac{2}{3}$ → AO: $y = \frac{2}{3}$

2a. $\boldsymbol{y = \frac{x+1}{x^2-2x}}$; $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = 0$ → AO: $y = 0$ $(asse\ x)$

3a. $\boldsymbol{y = \frac{x^3-8}{x^2+1}}$; $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \pm\infty$ → AO $\nexists$

C) OBLIQUI

Condizioni : può esistere solo se

1. $\boldsymbol{\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \pm\infty}$
2. $\boldsymbol{m = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x}}$ con $\boldsymbol{m}$ finito e $\neq 0$

della Prof.ssa Agueli Maria Assunta

3. $\boldsymbol{q} = \lim_{x\to\pm\infty}[\boldsymbol{f(x) - mx}]$ con $\boldsymbol{q}$ finito

NB = →se il grado del numeratore è più grande di <u>1</u> rispetto al grado del denominatore, allora <u>può esistere</u> l'asintoto obliquo.

Esempio: $\boldsymbol{y = \frac{x^2-5x+1}{3x+2}}$

1. $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2-5x+1}{3x+2} = \pm\infty$
2. $\boldsymbol{m} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2-5x+1}{3x+2} * \frac{1}{x} = \frac{1}{3}$ ➔ $\boldsymbol{m}$ finito e $\neq 0$
3. $\boldsymbol{q} = \lim_{x\to\infty} [\frac{x^2-5x+1}{3x+2} - \frac{1}{3}x] = \lim_{x\to\infty} \frac{\cancel{3x^2}-15x+3\cancel{-3x^2}-2x}{3(3x+2)} = -\frac{17}{9}$
4. A Obl : con $y = \frac{1}{3}x - \frac{17}{9}$

della Prof.ssa Agueli Maria Assunta

Data una funzione $y = f(x)$ Determinare:

4. LE INTERSEZIONI CON

A) L'ASSE X:

Si pone
$$\begin{cases} y = f(x) \\ y = 0 \end{cases}$$

esempio $\begin{cases} y = \frac{2x-8}{x^2-5x+6} \\ y = 0 \end{cases}$

Una frazione è nulla se è nullo il suo numeratore, per cui si avrà $2x - 8 = 0$

$ossia \begin{cases} x = 4 \\ y = 0 \end{cases}$

B) L'ASSE Y

Si pone
$$\begin{cases} y = f(x) \\ x = 0 \end{cases}$$

L'intersezione con l'asse y è data dal TERMINE NOTO ossia

esmpi

$\begin{cases} y = 4x^3 - 8x^2 + 2x - 3 \\ x = 0 \end{cases}$ ➔ $\begin{cases} x = 0 \\ y = -3 \end{cases}$

$\begin{cases} y = \frac{4x - 8}{x^3 + 16} \\ x = 0 \end{cases}$ ➔ $\begin{cases} x = 0 \\ y = \frac{-8}{16} = -\frac{1}{2}. \end{cases}$

C) GLI ASINTOTI (esclusi gli **A.V.**)

Si pone a sistema la $f(x)$ con l'equazione dell'asintoto:

- ⇨ Se il sistema ha soluzioni, queste sono le intersezioni cercate

Esempio:

$$\begin{cases} \boldsymbol{y = \dfrac{4x^2+3}{x^2-2x}} \\ \boldsymbol{y = 4} \end{cases} \qquad \begin{cases} \boldsymbol{AO: y = 4} \\ \rightarrow \boldsymbol{4 = \dfrac{4x^2+3}{x^2-2x}} \end{cases} \qquad \rightarrow \boldsymbol{\cancel{4x^2} - 8x = \cancel{4x^2} + 3}$$

$$\boldsymbol{x = -\frac{3}{8}}$$

- ⇨ Il denominatore non influisce: si toglie perché si moltiplicano entrambi i membri per stesso n°$\neq 0$

Per cui la $f(x)$ incontra l'AO nel punto $P(-\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{8}}; \mathbf{4})$

Data una funzione $y = f(x)$ Determinare:

5. STUDIO DEL SEGNO DELLA $\boldsymbol{f(x)}$

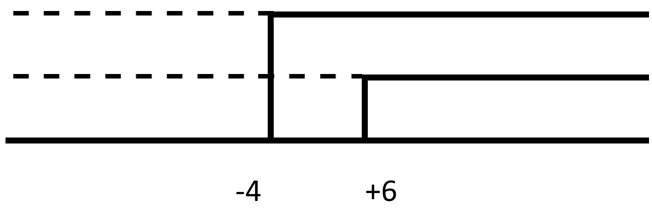
Si imposta la disequazione $f(x) > 0$ (oppure si pone f(x)≥0 associando intersezione asse X e studio segno)

Esempio

esempio $\begin{cases} \boldsymbol{y = \frac{2x+8}{x-6}} \\ \boldsymbol{y} > 0 \end{cases}$

N: $\boldsymbol{2x+8} > 0$

D: $\boldsymbol{x \quad -6} > 0$



Per x<-4 ed x>6 la funzione è positiva

Per -4<x<6 la funzione è negativa

1. Prova ora tu ad effettuare l'intersezione assi e studio segno della $y = \frac{4x^2-9}{x+1}$

6. LA DERIVATA PRIMA

E' importante ricordare che la derivata prima di una funzione in un suo punto rappresenta il coefficiente angolare della re tangente alla curva in quel punto.

Ricordiamo le regole

BENE $$\begin{cases} D[ax^n] = a \cdot n \cdot x^{n-1} \\ D[f(x) \cdot g(x)] = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x) \\ D\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{[g(x)]^2} \end{cases}$$

$D[e^x] = e^x$

$D[\ln x] = \frac{1}{x}$

$D[f(z(x)] = f'(z) \cdot z'(x)$ derivata di una funzione composta (approfondimento)

Esempio:

$D\left[e^{f(x)}\right] = f'(x) \cdot e^{f(x)}$ (approfondimento)

$D[\lg(f(x))] = \frac{f'(x)}{f(x)}$ (approfondimento)

Data una funzione $y = f(x)$ Determinare:

7. SEGNO DELLA DERIVATA PRIMA

Data una $y = f(x)$, dopo averne calcolato la $y' = (x)$ se ne studia il segno impostando una disequazione

Esempio:

$y = x^3 - 6x^2 - 15x + 4 \quad \rightarrow \quad y' = 3x^2 - 12x - 15$

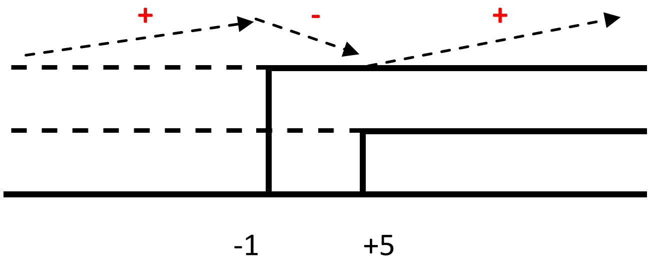
Da cui si ha $y' = 3(x^2 - 4x - 5) \geq 0 \quad \rightarrow \quad x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

$x_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{16+20}}{2} \quad \rightarrow \quad x_1 \geq 5; \quad x_2 \geq -1$

$x_1 = 5;\ x_2 = -1$ sono i valori che annullano la $D(f(x)) = y'$

DISEQUAZIONE – STUDIO DEL SEGNO

Per essere considerati Min e Max relativi debbono essere punti validi della $f(x)$, ossia accettati dal CE.



Nel nostro esempio non c'è denominatore quindi possiamo considerarli punti max e min e trovarne la coordinata Y, con il sistema

Max $\begin{cases} x = -1 \\ y = -1 - 6 + 15 + 4 = 12 \end{cases}$

Picco (-1; 12)

Min $\begin{cases} x = 5 \\ y = 125 - 150 - 75 + 4 = -104 \end{cases}$

Abisso (5; -104)

Data una funzione $y = f(x)$ Determinare:

8. INTERVALLI DI CRESCENZA E DECRESCENZA

Poiché il valore della derivata prima di una funzione in un suo punto rappresenta il coefficiente angolare della retta tangente alla curva in quel punto, negli intervalli in cui la derivata prima è positiva, la curva è crescente, negli intervalli in cui la derivata prima è negativa, la curva è decrescente ed i valori della x che annullano la derivata prima sono massimi o minimi relativi o punti di flesso a tangente orizzontale.

della Prof.ssa Agueli Maria Assunta

Data una funzione $y = f(x)$ Determinare:

9. MASSIMI E MINIMI (E *FLESSI A TANGENTE* ORIZZONTALI)

A) RELATIVI

UN PUNTO SI DICE DI MASSIMO RELATIVO PER LA FUNZIONE SE :

è UN PUNTO DELLA FUNZIONE

ANNULLA LA DERIVATA PRIMA

NEL SUO INTORNO SINISTRO F'(X) >0 E NEL SUO INTORNO DESTRO F'(X)<0 (OSSIA è MASSIMO RISPETTO AI VALORI CHE LA FUNZIONE ASSUME NEL SUO INTORNO)

UN PUNTO SI DICE DI MINIMO RELATIVO PER LA FUNZIONE SE :

è UN PUNTO DELLA FUNZIONE

ANNULLA LA DERIVATA PRIMA

NEL SUO INTORNO SINISTRO F'(X) <0 E NEL SUO INTORNO DESTRO F'(X)>0 (OSSIA è MINIMO RISPETTO AI VALORI CHE LA FUNZIONE ASSUME NEL SUO INTORNO)

B) ASSOLUTI

SI CHIAMA MASSIMO(O MINIMO)ASSOLLUTO DI UNA FUNZIONE IL MASSIMO (MINIMO)VALORE CHE LA FUNZIONE ASSUME ALL'INTERNO DEL SUO DOMINIO

L

FLESSI A TANGENTE ORIZZONTALE

UN PUNTO SI DICE DI FLESSO A TANGENTE ORIZZONTALE PER LA FUNZIONE SE :

è UN PUNTO DELLA FUNZIONE

ANNULLA LA DERIVATA PRIMA

NEL SUO INTORNO SINISTRO E DESTRO LA F'(X) <0 (FLESSO DISCENDENTE)

NEL SUO INTORNO SINISTRO E DESTRO LA F'(X) >0 (FLESSO ASCENDENTE)

SI CHIAMA FLESSO A

della Prof.ssa Agueli Maria Assunta

Data una funzione $y = f(x)$ Determinare:

10. DISEGNARE IL GRAFICO

Il grafico discende automaticamente dalla rappresentazione grafica di ogni analisi effettuata nei precedenti punti

Il decalogo di Matematica

della Prof.ssa Agueli Maria Assunta